Concursul Interjudețean de Matematică „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

Ediția a XIX-a, Baia Mare, 14 noiembrie 2026
BAREM DE CORECTARE, CLASA A IX-A

Subiectul 1. Aflați $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $n^4+n^3+n^2+n+1$ este pătrat perfect.

Gazeta Matematică nr 4/2026

Soluție: Oficiu..... 1p

Pentru $n=-1\Rightarrow 1-1+1-1+1=1$ pătrat perfect 1p

Pentru $n=0\Rightarrow 0+1=1$ pătrat perfect 1p

Pentru $n=1\Rightarrow 1+1+1+1+1=5$ nu e pătrat perfect.....1p

Pentru $n=2\Rightarrow 16+8+4+2+1=31$ nu e pătrat perfect 1p

Pentru $n=3\Rightarrow 81+27+9+3+1=121$ pătrat perfect.....1p

Pentru $n\in\mathbb{Z}\setminus[-1,3]$ avem $n^4+n^3+n^2+n+1=pp\Rightarrow A=4n^4+4n^3+4n^2+4n+4$ pătrat perfect.

Avem $\left(2n^2+n\right)^2=4n^4+4n^3+n^2<A\Leftrightarrow 3n^2+4n+4>0$ relație adevărată pentru $\forall n\in\mathbb{Z}$. 1p

Avem $\left(2n^2+n+1\right)^2=4n^4+4n^3+5n^2+2n+1>A\Leftrightarrow n^2-2n-3>0\Leftrightarrow n\in(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$. 1p

Deci, pentru $n<-1$ sau $n>3$ avem $\left(2n^2+n\right)^2<A<\left(2n^2+n+1\right)^2$, adică pentru aceste valori ale lui n nu avem soluții. 1p

Deci $n\in\{-1,0,3\}$. 1p

Subiectul 2. Determinați secvențele de numere naturale nenule $a_1,a_2,...,a_n,...$ cu termeni distincți cu proprietatea că $a_1=1$ și $\dfrac{na_1+(n-1)a_2+...+a_n}{a_1+a_2+...+a_n}\geq\dfrac{n+2}{3}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Soluție: Oficiu..... 1p

Pentru $n=2\Rightarrow\dfrac{2+a_2}{1+a_2}\geq\dfrac{4}{3}\Rightarrow a_2\leq 2$. Cum $1=a_1\neq a_2\leq 2\Rightarrow a_2=2$. 1p

Arătăm, folosind metoda inducției matematice, că $a_n=n,\forall n\in\mathbb{N}^*$. Etapa de verificare este evidentă

Fie $k\in\mathbb{N}^*$. Presupunem că $a_1=1,a_2=2,...,a_k=k$ și demonstrăm că $a_{k+1}=k+1$. 1p

Pentru $n=k+1$, în inegalitatea din enunț obținem $\dfrac{(k+1)\cdot 1+k\cdot 2+...+2\cdot k+a_{k+1}}{1+2+..+k+a_{k+1}}\geq\dfrac{k+3}{3}$. 3p

Cum $(k+1)\cdot 1+k\cdot 2+...+2\cdot k=\sum_{i=1}^{k}(k-i+2)\cdot i=k\cdot\dfrac{k(k+1)}{2}-\dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}+2\dfrac{k(k+1)}{2}=$

$=\dfrac{k(k+1)(k+5)}{6}$. 2p

obținem $\dfrac{k(k+1)(k+5)}{2}+3a_{k+1}\geq\dfrac{k(k+1)(k+3)}{2}+(k+3)\cdot a_{k+1}$, deci $k(k+1)\geq k\cdot a_{k+1}\Rightarrow a_{k+1}\leq k+1$

Deoarece $a_{k+1}\notin\{1,2,...,k\}$ și $a_{k+1}\in\mathbb{N}^*\Rightarrow a_{k+1}=k+1$.

Așadar, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ avem $a_n=n$. 2p

Proiect realizat cu sprijinul financiar al Consiliului Județean Maramureș

Subiectul 3. Fie $x, y \in [0,1]$ astfel încât $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$. Arătați că $\frac{1}{3} \le \frac{x}{\sqrt{x}+1}+\frac{y}{\sqrt{y}+1} \le \frac{1}{2}$ și stabiliți cazurile de egalitate.

Soluție: Oficiu..... 1p

$\frac{x}{\sqrt{x}+1}+\frac{y}{\sqrt{y}+1}=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x}+1}+\frac{\left(\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{y}+1} \ge \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}+2}=\frac{1}{3}$ (inegalitatea lui Bergström), ...……...3p

cu egalitate pentru $x=y=\frac{1}{4}$. ……..……....1p

$$\frac{x}{\sqrt{x}+1}+\frac{y}{\sqrt{y}+1}=\frac{x-1+1}{\sqrt{x}+1}+\frac{y-1+1}{\sqrt{y}+1}=\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{y-1}{\sqrt{y}+1}+\frac{1}{\sqrt{y}+1}=$$

$$=\sqrt{x}-1+\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\sqrt{y}-1+\frac{1}{\sqrt{y}+1}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{y}+1}-1=\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+2}{\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\sqrt{y}+1\right)}-1=$$

$$=\frac{3}{\sqrt{xy}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+1}-1=\frac{3}{\sqrt{xy}+2}-1 \le \frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}.$$ ……..……....4p

Cu egalitate pentru $xy=0$, adică $xy \in \{(0,1);(1,0)\}$. ……1p

Metroda II Oficiu..... 1p

Dacă $\sqrt{x}=a$, atunci $\sqrt{y}=1-a$, iar inegalitatea devine

$\frac{1}{3} \le \frac{a^2}{1+a}+\frac{(1-a)^2}{2-a} \le \frac{1}{2}$ .....2 p

Considerăm funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, cu $f(t)=\frac{t^2}{1+t}+\frac{(1-t)^2}{2-t}=\frac{1-t+t^2}{2+t-t^2}$ ……..1p

Deoarece $f\left(\frac{1}{2}-t\right)=f\left(\frac{1}{2}+t\right)$ oricare ar fi $t \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$, deducem că graficul funcției f are ca axă de simetrie dreapta $x=\frac{1}{2}$.

Din $\frac{f(t)-f(s)}{t-s}=\frac{3(t+s-1)}{\left(2+t-t^2\right)\left(2+s-s^2\right)}>0, \forall t,s \in \left[\frac{1}{2},1\right]$ se deduce că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{2},1\right]$, . ……2p

iar simetria față de dreapta $x=\frac{1}{2}$, implică f descrescătoare pe intervalul $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ ……. . . . . ….2p

Atunci $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3} \le f(t), \forall t \in [0,1]$ și $f(0)=f(1)=\frac{1}{2} \ge f(t), \forall t \in [0,1]$ 2p

Subiectul 4. Să se rezolve ecuația $\sqrt{x+[x]}+\sqrt{x+\{x\}}=\sqrt{x+[x]\cdot\{x\}}+\sqrt{x+1}$ (unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a, iar $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real a).

Soluție: Oficiu..... 1p

Condițiile de existență impun $x\geq 0$ 1p

Dacă $[x]=0$, atunci $x=\{x\}$ și ecuația revine la $2x=x+1$ cu soluția $x=1$ care nu convine 2p

Dacă $[x]=1$, atunci ecuația revine la egalitatea $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+\{x\}}=\sqrt{x+\{x\}}+\sqrt{x+1}$, deci $x\in[1,2)$ 3p

Dacă $[x]\geq 2$, atunci ridicăm ambii membrii la pătrat și obținem

$$x+\sqrt{x}+x+\{x\}+2\sqrt{(x+[x])(x+\{x\})}=x+[x]\cdot\{x\}+x+1+2\sqrt{(x+[x]\cdot\{x\})(x+1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow([x]-1)(1-\{x\})=2\sqrt{(x+[x]\cdot\{x\})(x+1)}-2\sqrt{(x+[x])(x+\{x\})}.$$

Cum $[x]-1\geq 0$ și $1-\{x\}\geq 0$, deducem că $\sqrt{(x+[x]\cdot\{x\})(x+1)}\geq\sqrt{(x+[x])(x+\{x\})}$.

$$\Leftrightarrow x^2+x+x\cdot[x]\cdot\{x\}+[x]\cdot\{x\}\geq x^2+x\cdot\{x\}+x\cdot[x]+[x]\cdot\{x\}$$

$\Leftrightarrow 1+[x]\cdot\{x\}\geq\{x\}+[x]\Leftrightarrow(1-[x])(1-\{x\})\geq 0$ contradicție cu $[x]\geq 2$.

Deci pentru $[x]\geq 2$ nu există soluții 2p

În concluzie, mulțimea soluțiilor este $s=[1,2)$ 1p